

Rys. 5.6

Wykorzystano tu też zależności

$$(i_{22})^2 = \frac{J_{22}}{F} = \frac{ah^3}{12} \frac{1}{ah} = \frac{h^2}{12} \quad \text{oraz} \quad (i_{33})^2 = \frac{J_{33}}{F} = \frac{ha^3}{12} \frac{1}{ah} = \frac{a^2}{12}$$

b) W zadaniu nieliniowym oś obojętną opisuje równanie liniowe postaci

$$\sigma_{11} = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \left(\frac{\overset{\circ}{x}_3}{(i_{22}(N+1))^2} \right)^n x_3 + \left(\frac{\overset{\circ}{x}_2}{(i_{33}(N+1))^2} \right)^n x_2 = 0$$

$$x_3 = \left(\frac{\overset{\circ}{x}_2}{\overset{\circ}{x}_3} \right)^n \left(\frac{(i_{22}(N+1))^2}{(i_{33}(N+1))^2} \right)^{2n} x_2 - \left(\frac{(i_{22}(N+1))^2}{\overset{\circ}{x}_3} \right)^n$$

Jeżeli postąpimy jak w zadaniu liniowym, przyjmując, że oś obojętna powinna się pokrywać z krawędziami przekroju, to otrzymamy poszukiwane współrzędne jądra przekroju.

Kiedy osią obojętną są pionowe krawędzie $x_2 = \pm \frac{a}{2}$ to zachodzi

$$x_2 = \pm \frac{a}{2} \rightarrow 1 \pm \left(\frac{\overset{\circ}{x}_2}{(i_{33}(N+1))^2} \right)^n \frac{a}{2} = 0 \rightarrow \overset{\circ}{x}_2 = \pm (i_{33}(N+1))^2 \left(\frac{2}{a} \right)^N$$

$$x_3 = \pm \frac{h}{2} \rightarrow 1 \pm \left(\frac{\overset{\circ}{x}_3}{(i_{22}(N+1))^2} \right)^n \frac{h}{2} = 0 \rightarrow \overset{\circ}{x}_3 = \pm (i_{22}(N+1))^2 \left(\frac{2}{h} \right)^N$$

Wartości promieni bezwładności $(i_{22}(N+1))^2$ oraz $(i_{33}(N+1))^2$ wyliczymy z zależności

$$(i_{22}(N+1))^2 = \frac{J_{22}(N+1)}{ah} = \frac{2}{ah} \int_0^{h/2} ax_3^{N+1} dx_3 = \frac{1}{N+2} \left(\frac{h}{2} \right)^{N+1}$$

stąd

$$\overset{\circ}{x}_3 = \pm \frac{1}{N+2} \left(\frac{h}{2} \right)^{N+1} \left(\frac{2}{h} \right)^N = \pm \frac{1}{N+2} \frac{h}{2}$$

podobnie $\overset{\circ}{x}_2 = \pm \frac{1}{N+2} \frac{a}{2}$

Z otrzymanego rezultatu wnosimy, iż w zakresie nieliniowego zginania obszar rdzenia przekroju znajduje się w granicach

$$\frac{a}{6} < \left| \overset{\circ}{x}_2 \right| < \frac{a}{4} \quad \frac{h}{6} < \left| \overset{\circ}{x}_3 \right| < \frac{h}{4}$$

ZADANIE 5.7.

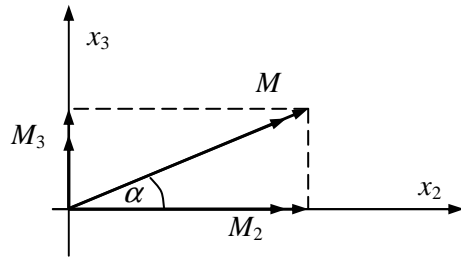
Należy wyznaczyć położenie osi obojętnej w pręcie poddanym jednoczesnemu działaniu siły osiowej P oraz momentowi zginającemu M nachylnemu pod kątem α do osi głównej x_2 . W rozważaniach należy uwzględnić również nieliniowo sprężysty zakres odkształceń materiału.

Rozwiązanie:

Moment zginający M należy rozłożyć względem głównych centralnych osi bezwładności x_2 i x_3 . Zachodzą wówczas związki

$$M_2 = M \cos \alpha, \quad M_3 = M \sin \alpha$$

Następnie będziemy korzystać z wyrażń na rozkład naprężeń normalnych σ_{11} w ogólnym przypadku liniowych deformacji pręta.

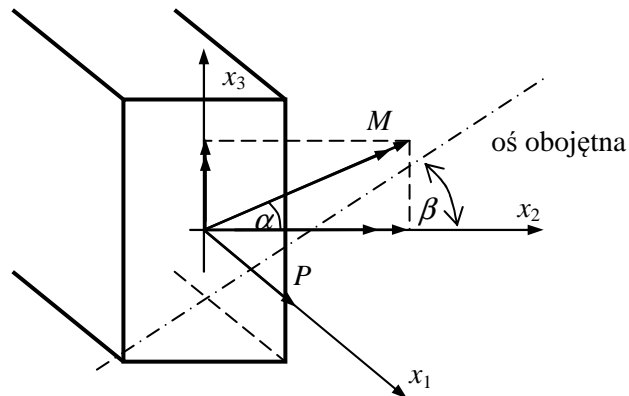


Rys. 5.7a

a) W zadaniu **liniowo-sprężystym** naprężenia normalne określone są liniową relacją

$$\sigma_{11} = \frac{P}{F} + \frac{M \cos \alpha}{J_{22}} x_3 - \frac{M \sin \alpha}{J_{33}} x_2$$

stąd dla $\sigma_{11} = 0$ zachodzi



Rys. 5.7b

$$\frac{P}{F} \left(1 + \frac{M \cos \alpha}{P (i_{22})^2} x_3 - \frac{M \sin \alpha}{P (i_{33})^2} x_2 \right) = 0 \quad \rightarrow$$

$$x_3 = x_2 \frac{(i_{22})^2}{(i_{33})^2} \operatorname{tg} \alpha - \frac{P (i_{22})^2}{M \cos \alpha}, \quad x_3 = x_2 \operatorname{tg} \beta - b,$$

$$\operatorname{tg} \beta = \left(\frac{i_{22}}{i_{33}} \right)^2 \operatorname{tg} \alpha, \quad b = \frac{P (i_{22})^2}{M \cos \alpha}$$

Oś obojętna jest więc prostą nachyloną pod kątem β , przechodzącą przez punkt o współrzędnych $(0, -b)$.

b) W nieliniowo-sprężystym przypadku analogiczne wyrażenie na σ_{11} ma postać

$$\sigma_{11}^n = \left(\frac{P}{F} \right)^n + \left(\frac{M \cos \alpha}{J_{22}(N+1)} \right)^n x_3 - \left(\frac{M \sin \alpha}{J_{33}(N+1)} \right)^n x_2$$

stąd przy $\sigma_{11} = 0$ będzie zachodził związek

$$\left(\frac{P}{F} \right)^n \left[1 + \left(\frac{MF \cos \alpha}{PJ_{22}(N+1)} \right)^n x_3 - \left(\frac{MF \sin \alpha}{PJ_{33}(N+1)} \right)^n x_2 \right] = 0$$

Równanie osi ma postać

$$x_3 = \left(\frac{J_{22}(N+1)}{J_{33}(N+1)} \operatorname{tg} \alpha \right)^n x_2 - \left(\frac{PJ_{22}(N+1)}{MF \cos \alpha F} \right)^n$$

czyli $x_3 = x_2 \operatorname{tg} \gamma - B$, gdzie

$$\operatorname{tg} \gamma = \left(\frac{J_{22}(N+1)}{J_{33}(N+1)} \operatorname{tg} \alpha \right)^n, \quad B = \left(\frac{PJ_{22}(N+1)}{MF \cos \alpha} \right)^n \quad N = \frac{1}{n}$$

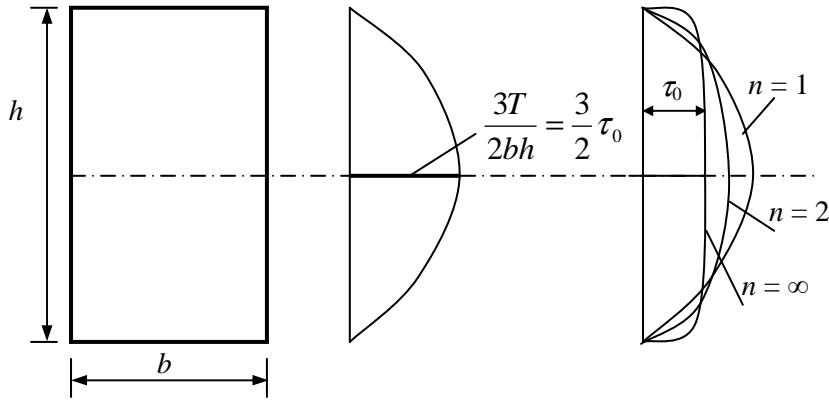
Z porównania rozwiązania liniowego z nieliniowym wynika, że oś obojętna w zadaniu nieliniowym będzie przebiegała bliżej środka ciężkości niż w zadaniu liniowym.

ZADANIE 5.8.

Należy określić rozkład naprężeń tnących σ_{13} w przekroju prostokątnym $b \times h$ poddanym działaniu siły poprzecznej T uwzględniając również nieliniowy zakres odkształceń.

Rozwiązanie:

- a) W zakresie **liniowo-sprężystym** korzystamy ze wzoru Żurawskiego



Rys. 5.8

$$\sigma_{13} = \frac{TS}{bJ_{22}} \quad \text{gdzie} \quad S = \int_{x_3}^{h/2} bx_3 dx_3 = \frac{b}{2} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - (x_3)^2 \right],$$

$$J_{22} = \frac{bh^3}{12}$$

stąd

$$\sigma_{13} = \frac{6T}{bh^3} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - (x_3)^2 \right], \quad \sigma_{13}(0) = \frac{3T}{2bh}, \quad \sigma_{13}\left(\frac{h}{2}\right) = 0$$

Największe z naprężeń tnących występuje w środku ciężkości $\sigma_{13}(0)$ znika zaś we włóknach skrajnych.

- b) W zakresie **nieliniowo-sprężystym** korzystamy z wzoru

$$\sigma_{13} = \frac{TS(N)}{bJ_{22}(N+1)}$$

Momenty styczne $S(n)$ i momenty bezwładności $J_{22}(N+1)$ wyliczymy ze wzorów

$$S(N) = \int_{x_3}^{h/2} b(x_3)^N dx_3 = \frac{b}{N+1} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^{N+1} - x_3^{N+1} \right],$$

$$J_{22}(N+1) = 2b \int_0^{h/2} x_3^{N+1} dx_3 = \frac{2b}{N+2} \left(\frac{h}{2} \right)^{N+2}$$

stąd

$$\sigma_{13} = \frac{T}{2b} \frac{N+2}{N+1} \left(\frac{2}{h} \right)^{N+2} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^{N+1} - x_3^{N+1} \right], \quad \sigma_{13}(0) = \frac{N+2}{N+1} \frac{T}{bh},$$

$$\sigma_{13} \left(\frac{h}{2} \right) = 0, \quad x_3 > 0$$

Zauważmy, iż ze wzrostem N rozkład naprężeń tnących będzie bardziej „płaski” a największa jego wartość w środku ciężkości maleje

$$\text{od } \sigma_{13}^e(0) = \frac{3T}{2bh} \quad \text{do} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_{13}(0) = \frac{T}{bn}$$

Jest to istotna różnica, dochodząca krańcowo do około 30%.

ZADANIE 5.9.

Należy określić rozkład naprężeń tnących σ_{13} w przekroju dwuteowym o wymiarach $b \times h$ o grubości ścianki g poddanym działaniu siły T .

Rozwiązanie:

Problem analizować będziemy w zakresie nieliniowym, a wynik liniowy otrzymamy jako przypadek szczególny. Momenty statyczne i momenty bezwładności są określone zależnościami

$$\begin{aligned} J_{22}(N+1) &= 2b \int_0^{h/2} x_3^{N+1} dx_3 - 2(b-g) \int_0^{h/2-g} x_3^{N+1} dx_3 = \\ &= \frac{2b}{N+2} \left(\frac{h}{2} \right)^{N+2} - \frac{2(b-g)}{N+2} \left(\frac{h}{2} - g \right)^{N+2} \end{aligned}$$

W przedziale $0 < x_3 < \left(\frac{h}{2} - g\right)$

$$S'(N) = \int_{x_3}^{h/2-g} g(x_3)^N dx_3 = \frac{g}{N+1} \left[\left(\frac{h}{2} - g\right)^{N+1} - x_3^{N+1} \right] \quad - \quad \text{środek}$$

natomiast dla $\left(\frac{h}{2} - g\right) < x_3 < \frac{h}{2}$

$$S''(N) = \int_{x_3}^{h/2} b(x_3)^N dx_3 = \frac{b}{N+1} \left[\left(\frac{h}{2}\right)^{N+1} - x_3^{N+1} \right] \quad - \quad \text{półka}$$

Naprężenie tnące w środku $\sigma_{13}(x_3)$ wyznaczmy ze wzorów

$$\sigma_{13} = \frac{TS(N)}{gJ_{22}(N+1)} = \frac{N+2}{N+1} \frac{T}{2b} \left[\left(1 - \frac{b}{g}\right) \left(\frac{h}{2} - g\right)^{N+1} - x_3^{N+1} + \frac{b}{g} \left(\frac{h}{2}\right)^{N+1} \right].$$

środek

$$\left[\left(\frac{h}{2}\right)^{N+2} - \frac{(b-g)}{b} \left(\frac{h}{2} - g\right)^{N+2} \right]^{-1}$$

$$S(N) = S'(N) + S''(N) \Big|_{x_3 = \frac{h}{2} - g}$$

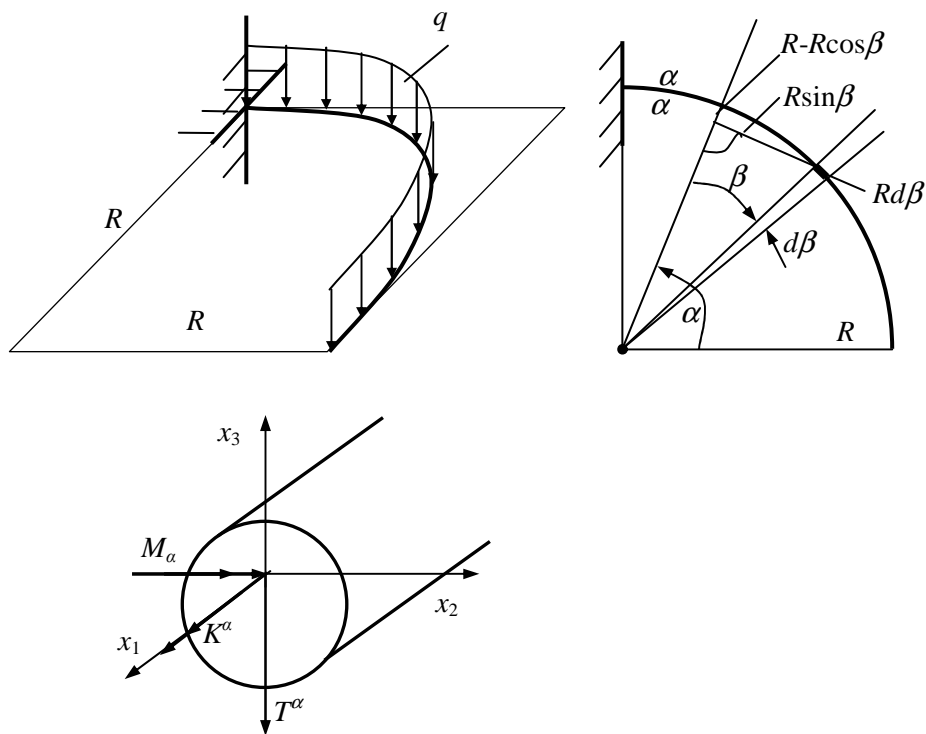
Prypadkiem szczególnym tych wzorów dla $(N=1)$ są rozkłady naprężeń stycznych w dwuteowniku wykonanym z materiału liniowo-sprężystego.

ZADANIE 5.10.

Należy zaprojektować wspornik w kształcie ćwiartki okręgu o promieniu R i przekroju kołowym. Na wspornik działa obciążenie pionowe, równomiernie rozłożone q . Rozważania należy przeprowadzić w liniowym i nieliniowym zakresie sprężystym. Do wyznaczania naprężenia zredukowanego należy stosować hipotezę wyężeniową H-M-H postaci

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)} \leq k$$

gdzie k – jest wartością graniczną stanu wyężenia materiału.



Rys. 5.10

Rozwiązanie:

W pierwszej kolejności wyznaczamy wartości sił przekrojowych (M_α , K_α , T_α) jako funkcje położenia α przekroju

Wartości momentu zginającego M_α , skręcającego K_α i siły tnącej T_α w przekroju α - α obliczymy z wzorów

$$M_\alpha = \int_0^\alpha R \sin \beta q R d\beta = -qR^2 \cos \beta \Big|_0^\alpha = qR^2 (1 - \cos \alpha)$$

$$K_\alpha = \int_0^\alpha (R - R \cos \beta) q R d\beta = qR^2 \int_0^\alpha (1 - \cos \beta) d\beta = qR^2 (\alpha - \sin \alpha)$$

$$T_\alpha = \int_0^\alpha q R d\beta = qR\alpha$$

Największe wartości sił wewnętrznych wystąpią w utwierdzeniu, dla $\alpha = \frac{\pi}{2}$,

$$M_0 = qR^2, \quad K_0 = qR^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = qR^2 \gamma, \quad \gamma = 0,57, \quad T_0 = \frac{\pi}{2} qR$$

a) Zadanie liniowo - sprężyste

Naprężenia normalne σ_{11} i tnące τ wyznaczamy ze wzorów $\sigma_{11} = \frac{M_0}{J_{22}} x_3$,

$$\sigma_{13} = \frac{T_0 \bar{S}(x_3)}{b(x_3) J_{22}}, \quad \sigma_{12} = \frac{K_0}{J_0} \rho, \quad \text{gdzie } \rho^2 = x_2^2 + x_3^2, \quad J_0 = \frac{\pi r^4}{2}.$$

Najbardziej wyęzione są górne i dolne włókna o współrzędnych $(0, r)$ i $(0, -r)$. Wystąpią tam naprężenia σ_{11} i σ_{12} , stąd naprężenie zredukowane wynosi

$$\sqrt{(\sigma_{11})^2 + 3(\sigma_{12})^2} \leq k$$

czyli

$$qR^2 \sqrt{\left(\frac{r}{J_{22}} \right)^2 + 3 \left(\frac{\gamma r}{J_0} \right)^2} \leq k \quad \rightarrow \quad \frac{qR^2}{r^3} \sqrt{\left(\frac{4}{\pi} \right)^2 + 3 \left(\frac{2\gamma}{\pi} \right)^2} \leq k$$

$$\text{Ostatecznie promień przekroju } r \text{ wynosi } r \geq \left\{ \frac{qR^2 \left[\left(\frac{4}{\pi} \right)^2 + 3 \left(\frac{2\gamma}{\pi} \right)^2 \right]^{1/2}}{k} \right\}^{1/3}.$$

b) Zadanie nieliniowo - sprężyste

Naprężenia normalne σ_{11} i τ określone są w tym przypadku zależnościami

$$\sigma_{11} = \frac{M_\alpha}{J_{22}(N+1)} (x_3)^N, \quad \text{gdzie } J_{22}(N+1) = \alpha_2 (2r)^{N+3}$$

zaś

$$\tau = \frac{K_\alpha}{J_0(N+1)} (\rho)^N, \quad \text{gdzie } \rho^2 = x_2^2 + x_3^2, \quad J_0(N+1) = (N+3)^{-1} 2\pi r^{N+3}$$

Najbardziej wyęzione są, podobnie jak poprzednio, górne i dolne włókna przekroju o współrzędnych $(0, r)$ i $(0, -r)$. Naprężenie zredukowane przyjmie wówczas wartość ($\rho = r$)

$$\sqrt{(\sigma_{11})^2 + 3(\tau)^2} \leq k$$

stąd

$$\begin{aligned}
 qR^2 r^N \sqrt{\left(\frac{1}{J_{22}(N+1)}\right)^2 + 3\left(\frac{\gamma}{J_0(N+1)}\right)^2} &\leq k \Rightarrow \\
 \Rightarrow qR^2 r^N \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha_2(2r)^{N+3}}\right)^2 + 3\left(\frac{\gamma(N+3)}{2\pi r^{N+3}}\right)^2} &= \\
 = qR^2 r^N r^{-(N+3)} \sqrt{(\alpha_2 2^{(N+3)})^{-2} + \frac{3}{4\pi^2}(\gamma(N+3))^2} &\leq k
 \end{aligned}$$

Finalnie szukany promień wyliczymy z nierówności

$$r \geq \left\{ \frac{qR^2}{k} \left[(\alpha_2 2^{(N+3)})^{-2} + \frac{3}{4\pi^2} (\gamma(N+3))^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}}$$

Występująca w tym wzorze stała α_2 została określona w zadaniu 1.15.

Z porównania promieni przekrojów r'/r wyliczonych w liniowym i nieliniowym zadaniu sprężystym wynika

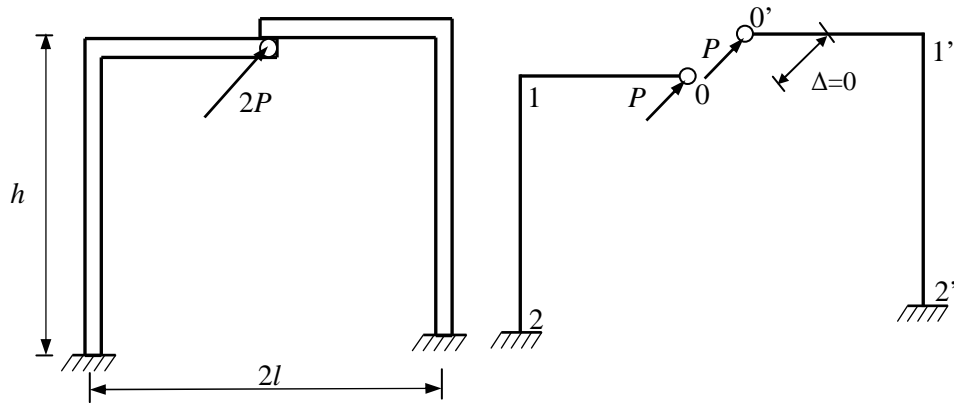
$$\begin{aligned}
 r'/r &= \sqrt[3]{\frac{qR^2}{k} \sqrt{\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 + 3\left(\frac{2\gamma}{\pi}\right)^2}} / \sqrt[3]{\frac{qR^2}{k} \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha_2 2^{N+3}}\right)^2 + 3\left(\frac{\gamma(N+3)}{2\pi}\right)^2}} \rightarrow \\
 r'/r &= \left[(16 + 12\gamma^2) \left(\pi^2 \alpha^{-4} 2^{-2(N+3)} + \frac{3}{4} \gamma^2 (N+3)^2 \right)^{-1} \right]^{\frac{1}{6}} > 1
 \end{aligned}$$

Wnosimy stąd, iż w tym samym zadaniu wyznaczono dwa różne promienie potrzebnego przekroju r' i r , przy czym promień w zadaniu liniowo – sprężystym jest większy od wyliczonego w zadaniu nieliniowym. Można stąd wnosić, iż uwzględnienie nieliniowości prowadzi tu do oszczędniejszego projektowania.

ZADANIE 5.11.

Należy zaprojektować przekrój kołowy ramy przedstawionej na rys. 5.11a. Na ramę tą działa siła pozioma $2P$ przyłożona w styku 0, prostopadle do rygła.

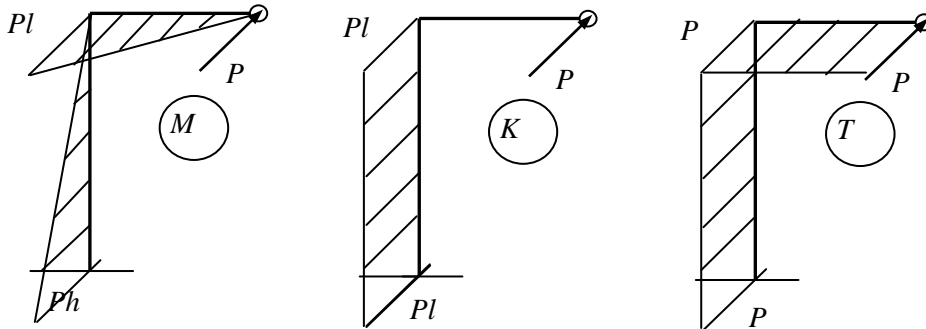
W miejscu przyłożenia obciążenia rygiel jest przecięty, tak jednak, że obie części przekazują na siebie siły oddziaływania bez tarcia.

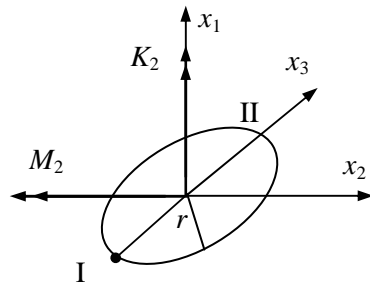


Rys. 5.11a

Rozwiązanie:

Analizowane zadanie jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne, ale wobec symetrii obu części układu $0 - 2$ i $0' - 2'$ oraz warunku $\Delta \rightarrow 0$ należy przyjąć, iż na każdy z podukładów działa siła P . Rozbijając układ na dwa statycznie wyznaczalne podukłady możemy prosto wyznaczyć rozkłady momentów zginających i skręcających oraz sił tnących.





Rys. 5.11b

Najbardziej wyciężonymi przekrojami będą przekroje przy utwierdzeniu, gdzie

$$M_2 = Ph, \quad K_2 = Pl, \quad T_2 = P$$

W przekrojach tych będziemy też analizować wyciężenie korzystając z hipotezy H-M-H.

a) Zadanie liniowo - sprężyste

Naprężenia normalne σ_{11} i tnące τ wyznaczmy z wzorów

$$\sigma_{11} = \frac{M_2}{J_{22}} x_3$$

gdzie $J_{22} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{J_0}{2}, \quad \tau = \sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2} = \frac{K_2}{J_0} \rho, \quad \rho^2 = x_2^2 + x_3^2$

W najbardziej wyciężonych włóknach I i II naprężenie zredukowane wynosi

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau^2} \leq k$$

stąd

$$\sqrt{\left(\frac{4M_2}{\pi r^3}\right)^2 + 3\left(\frac{2K_2}{\pi r^3}\right)^2} \leq k \rightarrow \frac{2P}{\pi r^3} \sqrt{(2h)^2 + 3l^2} \leq k$$

Wyznaczony z tej nierówności promień przekroju r wynosi

$$r \geq \left\{ \frac{2P}{\pi k} \left[(2h)^2 + 3l^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/3}$$

b) Zadanie nieliniowo - sprężyste

Naprężenia normalne σ_{11} i wyliczymy z równania

$$\sigma_{11} = \frac{M_2}{J_{22}(N+1)} (x_3)^N$$

gdzie $J_{22}(N+1) = \alpha_2 (2r)^{N+3}$ tu α_2 jest stałą wyznaczoną w zadaniu 1.15.

Naprężenie tnące τ określa wzór

$$\tau = \frac{K_2}{J_0(N+1)} (\rho)^N$$

gdzie $\rho^2 = x_2^2 + x_3^2$, $J_0(N+1) = (N+3)^{-1} 2\pi r^{N+3}$

Włókna najbardziej wyężone znajdują się w punktach I i II w utwierdzeniu η .

Naprężenie zredukowane we włóknie $\rho = r$ ma wartość

$$\sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau^2} \leq k$$

stąd

$$P(r)^N \sqrt{\left(\frac{h}{J_{22}(N+1)} \right)^2 + 3 \left(\frac{l}{J_0(N+1)} \right)^2} \leq k \rightarrow$$

$$P(r)^N (r^{N+3})^{-1} \sqrt{\left(\frac{h}{\alpha_2 2^{N+3}} \right)^2 + 3 \left(\frac{N+3}{2\pi} \right)^2} \leq k$$

Ostatecznie promień okręgu wyliczymy z nierówności

$$r \geq \left\{ \frac{P}{K} \left[h^2 (\alpha_2 2^{N+3})^{-2} + \frac{3}{4\pi^2} (N+3)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/3}$$

W rozważaniach pomijamy naprężenia tnące pochodzące od siły tnącej T_2 , gdyż największa ich wartość wystąpi w środku przekroju, gdzie brak σ_{11} i naprężenia tnącego τ pochodzącego od skręcania.